УДК 517.977.52, 517.977.58, 517.983.54, 519.853

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ [1]

© **М. И. Сумин**

Ключевые слова: оптимальное управление; поточечные фазовые ограничения; минимизирующая последовательность; метод возмущений; двойственность; регуляризация; принцип максимума Понтрягина.

Аннотация: Доклад посвящен применению метода двойственной регуляризации в параметрической линейно-выпуклой задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства; обсуждается так называемый регуляризованный принцип максимума Понтрягина.

Постановка задачи. Рассматривается параметрическая линейно-выпуклая задача оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv L_2(X)$

$$(P_{p,r}) \qquad g_0(u) \equiv \int_0^T (\langle F(t)x[u](t), x[u](t)\rangle + \langle G(t)u(t), u(t)\rangle)dt \to \min, \quad u \in \mathcal{D} \subset L_2(0,T),$$

$$g_1(u)(t) \equiv \langle \varphi_1(t), x[u](t)\rangle = h(t) + p(t),\ \ g_2(u)(t) \equiv \varphi_2(t, x[u](t)) \leqslant r(t) \ \ \text{при п.в. } t \in X.$$

Здесь: $p \in \mathcal{H}$, $r \in \mathcal{H}$ – параметры, $g_0 : L_2(0,T) \to R^1$ – сильно выпуклый функционал с постоянной κ, F, $A : [0,T] \to R^{n\times n}$, $B : [0,T] \to R^{n\times m}$, $G : [0,T] \to R^{m\times m}$ – измеримые по Лебегу ограниченные матрицы, φ_1, $h \in L_\infty(0,T)$ – заданные функции, $\varphi_2 : [0,T] \times R^n \to R^1$ – выпуклая по x, непрерывная вместе с градиентом $\nabla_x \varphi_2$ функция, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0,T) : u(t) \in U \text{ при п.в. } t \in (0,T)\}$, $U \subset R^m$ – выпуклый компакт, $X \subset [0,T]$, $X = \mathrm{cl}\ \overset{\circ}{X}$, $x[u](t),\ t \in [0,T]$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t),\ \ x(0) = x_0 \in R^n, \quad t \in [0,T].$$

Обозначим единственное решение задачи $(P_{p,r})$, если оно существует, через $u^0_{p,r}$.

Параметрическая двойственная регуляризация и принцип максимума Понтрягина. Двойственная регуляризация [1] для задачи $(P_{p,r})$ заключается в непосредственном решении двойственной к $(P_{p,r})$ и регуляризованной по Тихонову задачи

$$R^\alpha_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv V_{p,r}(\lambda,\mu) - \alpha\|(\lambda,\mu)\|^2 \to \sup,\ \ (\lambda,\mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+, \tag{1}$$

$$V_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv \min_{u\in\mathcal{D}} L_{p,r}(u,\lambda,\mu), \quad L_{p,r}(u,\lambda,\mu) \equiv g_0(u) + \langle \lambda, g_1(u) - h - p\rangle + \langle \mu, g_2(u) - r\rangle,$$

$$u[\lambda,\mu] \equiv \arg\min\{L_{p,r}(u,\lambda,\mu) : u \in \mathcal{D}\},\ (\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}) \equiv \arg\max\{R^\alpha_{p,r}(\lambda,\mu) : (\lambda,\mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+\},$$

$$\mathcal{H}_+ \equiv \{z \in L_2(X) : z(t) \geqslant 0 \text{ при п.в. } t \in X\},$$

в результате чего происходит аппроксимация в метрике $L_2(0,T)$ при $\alpha \to 0$ решения $u^0_{p,r}$ элементами $u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]$. Наличие параметра $(p,r) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ в исходной задаче позволяет исследовать зависимость от него свойств сходимости двойственного алгоритма (1): связь с дифференциальными

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00495) и аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» Минобрнауки РФ (регистрационный № 2.1.1/3927).

свойствами функции значений (S-функции) $\beta(p,r) \equiv \{g_0(u^0_{p,r})$, если задача $(P_{p,r})$ разрешима; $+\infty$ в противоположном случае$\}$, разрешимостью двойственной задачи, принципом Лагранжа и принципом максимума Понтрягина.

Важнейшее преимущество рассмотрения ограничений задачи $(P_{p,r})$, как ограничений в $L_2(X)$, заключается, прежде всего, в том, что это приводит к устойчивому к ошибкам исходных данных алгоритму ее решения [1]. В то же время, при определенных условиях на исходные данные эти ограничения можно, естественно, трактовать и как ограничения в $L_\infty(X)$ ($p,\ r \in L_\infty(X)$) и $C(X)$ ($\varphi_1,\ h,\ p,\ r \in C(X)$). При этом понятия оптимальности управления в указанных частных случаях эквивалентны понятию оптимальности для случая, когда «те же» ограничения рассматриваются в $L_2(X)$.

Как и в [1], [2], алгоритм (1) для решения задачи $(P_{p,r})$ ведет себя двояко в зависимости от того, разрешима или нет двойственная к $(P_{p,r})$ задача. В первом случае семейство двойственных переменных $(\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r})$, $\alpha \to 0$ ограничено в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, во втором – нет. Однако в обоих случаях «параллельно» с построением минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги алгоритм (1) ведет и к соответствующим необходимым условиям – так называемому регуляризованному принципу Лагранжа в недифференциальной форме [2] в задаче $(P_{p,r})$ и, соответственно, регуляризованному принципу максимума Понтрягина. Главное отличие последних от их классических аналогов заключается в том, что, во-первых, они записываются в терминах минимизирующих последовательностей (а не оптимальных управлений), а во-вторых, выполняются в любой задаче $(P_{p,r})$, имеющей решение (как известно, эти классические аналоги в задачах $(P_{p,r})$ с ограничениями в $L_2(X)$ могут не быть справедливыми).

В докладе центральное внимание уделяется обсуждению регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в задаче $(P_{p,r})$, возможности и целесообразности их применения для решения задач оптимизации, оптимального управления, а также некорректных обратных задач. Показывается также, что, если в задаче отсутствует ограничение-равенство $((P_{p,r}){=}(P_r))$, а ограничение-неравенство понимается как ограничение в $C(X)$, $r \in C(X)$, то регуляризованный принцип максимума после некоторой естественной перенормировки множителя μ^α_r, в независимости от того, разрешима или нет двойственная задача, приводит к невырожденному классическому принципу максимума Понтрягина для управления u^0_r, в записи которого участвует традиционная в таком важном частном случае мера Радона. Кроме того, обсуждается важность изучения параметрических задач $(P_{p,r})$ с точки зрения конструирования аналогичных алгоритмов решения и нелинейных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями [3]. Рассматриваются иллюстративные примеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 602-625.

2. *Сумин М.И.* Метод возмущений и двойственная регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования // Проблемы динамического управления: сб. науч. тр. факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова/ под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского. Вып. 3. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2008. С. 200-231.

3. *Сумин М.И.* Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 5. С. 796-816.

Abstract: The report is devoted to application of the dual regularization method in parametric linear-convex optimal control problem with equality and inequality pointwise state constraints; so-called regularized Pontryagin maximum principle is discussed.

Keywords: optimal control; pointwise state constraints; minimizing sequence; perturbation method; duality; regularization; Pontryagin maximum principle.

Сумин Михаил Иосифович
д. ф.-м. н., профессор
Нижегородский государственный университет
Россия, Нижний Новгород
e-mail: msumin@sinn.ru

Mikhail Sumin
doctor of phys.-math. sciences, professor
Nizhniy Novgorod State University
Russia, Nizhniy Novgorod
e-mail: msumin@sinn.ru

УДК 517.95

УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ [1]

© **В. И. Сумин, А. В. Чернов**

Ключевые слова: вольтерровы операторные уравнения; условия сохранения глобальной разрешимости.

Аннотация: Дается обзор полученных авторами достаточных условий сохранения глобальной разрешимости вольтерровых операторных уравнений, а также возможностей их конкретного применения к различным управляемым начально-краевым задачам для нелинейных уравнений с частными производными.

В [1] было предложено для изучения распределенных оптимизационных задач использовать функциональные уравнения вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \qquad t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \qquad z \in L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m\,, \tag{1}$$

где $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$, $v(.) : \Pi \to \mathbf{R}^s$ — управляющая функция, $A[.] : L_p^m \to L_q^l$ — оператор, вольтерров на некоторой системе T измеримых подмножеств Π в том смысле, что $\forall H \in T$ значения $A[z](t)$, $t \in H$, не зависят от значений $z(t)$, $t \in \Pi \setminus H$. Приведенное определение [1] вольтерровости функционального оператора является непосредственным многомерным обобщением известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра и означает, что $\forall H \in T \qquad P_H A = P_H A P_H$, где P_H — оператор умножения на характеристическую функцию множества $H \subset \Pi$. Множества $H \in T$ при этом естественно назвать вольтерровыми множествами функционального оператора A. Форма (1) удобна в теории оптимального управления, во-первых, ввиду того, что к ней естественным образом приводятся разнообразные управляемые начально-краевые задачи для самых различных нелинейных уравнений с частными производными, а во-вторых, потому, что такое описание распределенных управляемых систем адекватно

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00495) и аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» Минобрнауки РФ (регистрационный № 2.1.1/3927).